3.9 Centar savijanja

U prethodnom izlaganju ukazano je na malu uvojnu krutost otvorenih tankozidih profila u odnosu na zatvorene, tako da se pojavi uvijanja konstruktivnih elemenata sa otvorenim tankozidim profilom mora posvetiti posebna pa`nja.

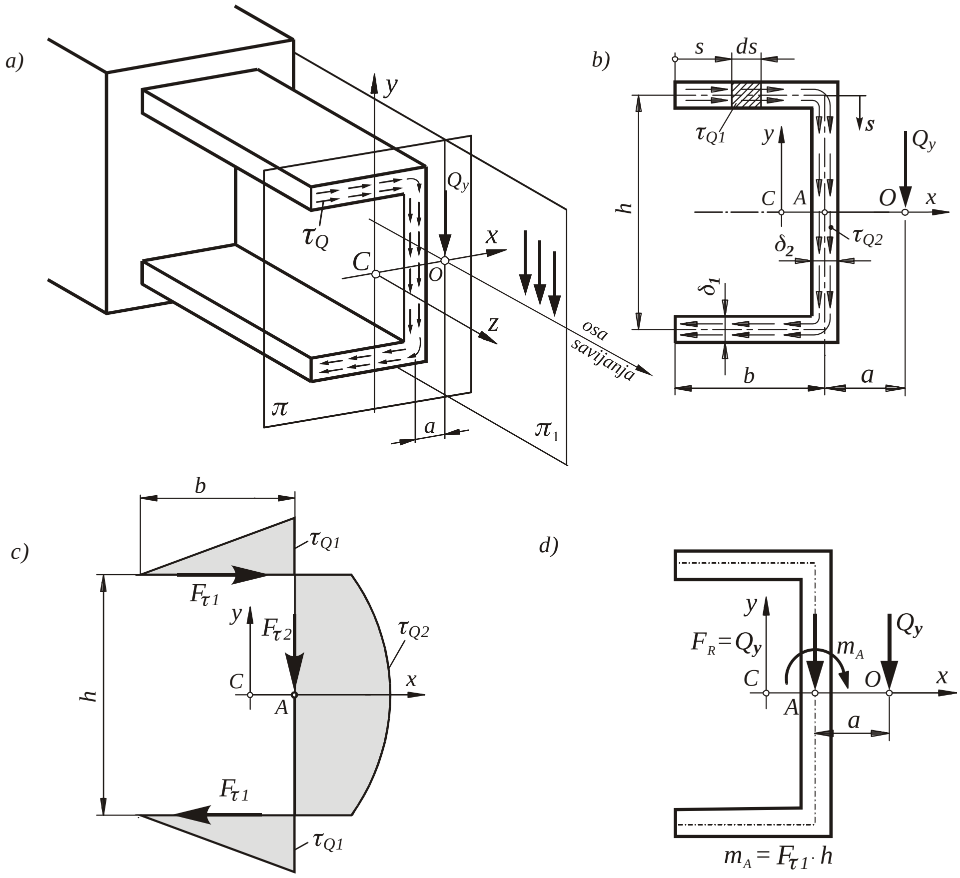
Posmatranjem nosa~a sa otvorenim jednosimetri~nim profilom (Sl.3.38.a,b,c), uo~ilo se da pri njihovom optere}ivanju silama u ravni koja nije ravan simetrije profila, a koja prolazi kroz te`i{te odnosno te`i{nu osu, dolazi do pojave uvijanja nosa~a pored baznog savijanja.

Prve radove iz ove oblasti dali su Timo{enko (1913), Grifit i Tejlor (1917), Majar (1921) i Veber (1924) [35]. Razmatraju}i ovu pojavu elementarno, Timo{enko je uo~io da bi ravan dejstva sila (ravan optere}enja), koja nije ravan simetrije profila, trebalo paralelno pomerati kako bi se eliminisao nastali moment uvijanja, tj. uvijanje nosa~a i ostvarilo samo savijanje nosa~a.

To zna~i da }e u ravni popre~nog preseka nosa~a postojati ta~ka kroz koju mora da pro|e ravan optere}enja, da bi se eliminisalo uvijanje.

Ta ta~ka naziva se **centar savijanja** ili **centar smicanja.**

Geometrijsko mesto centara savijanja u prostoru bi}e **osa savijanja**.



Sl. 3.34

Na elementarnom primeru jednosimetri~nog profila (Sl. 3.34.a), izvr{i}e se odre|ivanje polo`aja ravni optere}enja π_1 (u kojoj deluje transverzalna sila $\boldsymbol{Q_y}$) kada je moment uvijanja jednak nuli.

Raspodela smi~u}ih–tangencijalnih napona po popre~nom preseku nosa~a usled transverzalne sile $\boldsymbol{Q_y}$ je takva, kao kada sila deluje u centru savijanja, tj. kada nema pojave uvijanja nosa~a, odnosno posmatra se obi~no savijanje nosa~a silama. U tom slu~aju se sistem unutra{njih tangencijalnih sila u popre~nom preseku (ravan π) (Sl. 3.34.a), pri redukciji na ta~ku O (ta~ka prodora ose simetrije $\boldsymbol{Cx}$ i ravni π_1), redukuje na rezultantu jednaku po intenzitetu i smeru transverzalnoj sili $\boldsymbol{Q_y}$ u posmatranom preseku nosa~a.

Kao {to je poznato, redukcijom sistema sila u ravni na neku poizvoljnu ta~ku A (Sl. 3.34.d), sistem se svodi na glavni vektor $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = Q_y$ sa napadnom ta~kom u toj ta~ki, i na glavni moment $m_A = \sum M_A^{\vec{F}_i}$. Po{to glavni vektor predstavlja vektorski zbir sila sistema, on je stati~ka invarijanta, tj. veli~ina, pravac i smer glavnog vektora ne zavise od izbora redukcione ta~ke. Kako se pri redukciji javio i glavni moment (koji se menja zavisno od polo`aja redukcione ta~ke), glavni vektor nije rezultanta sistema sila. On }e biti rezultanta sistema sila tek kada sam bude zamenjivao sistem sila. Dakle, treba odrediti novu redukcionu ta~ku O za koju je glavni moment jednak nuli, a to je i re{enje postavljenog zadatka odre|ivanja polo`aja centra savijanja koji glasi:

$$m_O = \sum M_O^{\vec{F}_i} = 0 \, . \tag{3.135}$$

Prema (Sl. 3.34.c,d) dobija se da je:

$\sum M_O^{\vec{F}_{\tau i}} = F_{\tau 1} \cdot h - F_{\tau 2} \cdot a = 0$, odakle sledi da polo`aj centra savijanja treba da iznosi:

$$a = \frac{F_{\tau 1} \cdot h}{F_{\tau 2}} \, . \tag{3.136}$$

Sada treba odrediti tangencijalne sile u izrazu (3.136).

Elementarna tangencijalna sila, jednaka je proizvodu tangencijalnog napona i elementarne povr{ine konture (Sl. 3.34.b), odnosno:

$$dF_\tau = \tau_Q \cdot dA = \tau_Q \cdot \delta \cdot ds$$

Prema (Sl. 3.34.c), tangencijalne sile u delovima konture iznose:

$$F_{\tau 1} = \int_0^b \tau_{Q1} \cdot \delta_1 \cdot ds \, , \qquad F_{\tau 2} = \int_0^h \tau_{Q2} \cdot \delta_2 \cdot ds \, .$$

Zbog jednostavnijeg izlaganja, usvaja se da nema transverzalne sile u pravcu “x” ose, tj. $Q_x = 0$, tako da potrebni izrazi glase:

$$\tau_Q = \frac{Q_y S_x^{ots}}{I_x \delta(s)} \, , \qquad I_x \cong \frac{h^3 \delta_2}{12} + 2\delta_1 b \, \frac{h^2}{4} \, . \tag{3.137}$$

Ako je i $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, bi}e:

$$I_x = \frac{h^2 \delta}{12}(h + 6b) \, , \qquad S_x^{ots} = \int_0^s y \, dA = \int_0^s y \delta \, ds \, . \tag{3.138}$$

Tangencijalna sila u “pojasu” profila iznosi:

$$F_{\tau 1}=\int_0^b \frac{Q_y\cdot S_{x1}^{ots}}{I_x\cdot\delta}\cdot\delta\, ds=\int_0^b \frac{\delta\cdot Q_y\int_0^b \frac{h}{2}\delta\, ds}{\frac{h^2\delta}{12}\left(h+6b\right)\delta}\, ds\ .$$

Po{to se istovremeno menjaju dve veli~ine (F_τ *i* S_x^{ots}) zavisne od jedne promenljive “s” u istim granicama, uvodi se smena $s=s_1$ u izrazu za stati~ki moment, i vr{i dvostruko integraljenje, tj.:

$$F_{\tau 1}=\frac{6Q_y}{h\left(h+6b\right)}\int_0^b\int_0^s ds_1\, ds=\frac{6Q_y}{h\left(h+6b\right)}\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^b=\frac{Q_y}{h}\,\frac{3b^2}{h+6b}\,. \qquad (3.139)$$

Tangencijalna sila u “rebru” profila iznosi:

$$F_{\tau 2}=\int_0^h \tau_{Q2}\cdot\delta\, ds\ ,$$

$$F\tau_2=\int_0^h \frac{Q_y\cdot S_{x2}^{ots}}{I_x\cdot\delta}\cdot\delta\, ds=\int_0^h \frac{12Q_y\left(\delta\frac{bh}{2}+\int_0^h\left(\frac{h}{2}-s\right)\cdot\delta\, ds\right)}{h^2\delta\left(h+6b\right)\delta}\cdot\delta\, ds\ .$$

Analogno prethodnom integraljenju sile $F_{\tau 1}$, dobija se:

$$F_{\tau 2}=\frac{12Q_y}{h^2\left(h+6b\right)}\int_0^h\left[\frac{bh}{2}+\int_0^s\left(\frac{h}{2}-s_1\right)ds_1\right]ds=Q_y\,. \qquad (3.140)$$

Dakle, tangencijalna sila na rebru profila - $F_{\tau 2}$ jednaka je po intenzitetu spolja{njoj transverzalnoj sili Q_y.

Zamenom izraza (3.139) i (3.140) u (3.136) dobija se kona~no da je:

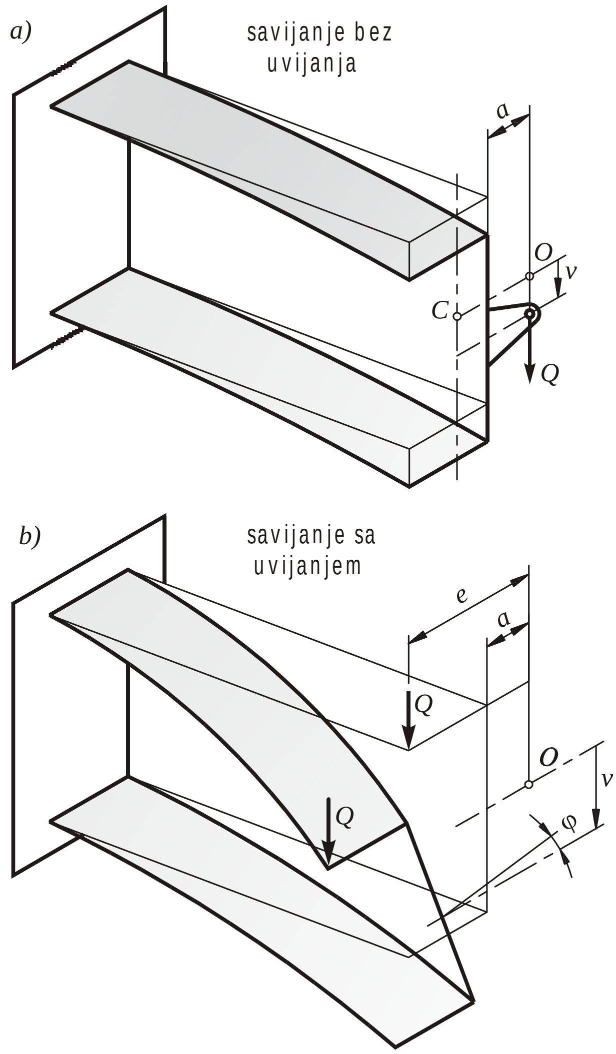
$$a=\frac{3b^2}{h+6b}\,. \qquad (3.141)$$

Dakle, **kada rezultanta spolja{njih sila *Q* prolazi kroz centar savijanja, savijanje nosa~a vr{i se bez pojave uvijanja** (Sl. 3.35.a).

Kada rezultanta spolja{njih transverzalnih sila *Q* ne prolazi kroz centar savijanja (Sl. 3.35.b), **onda se pored savijanja javlja i uvijanje usled momenta uvijanja:**

$$M_O=Q\cdot e\ , \qquad (3.142)$$

gde je e normalno rastojanje rezultante transverzalnih sila Q do centra savijanja O.



Sl. 3.35

Na (Sl. 3.35), pomeranja su:

$\boldsymbol{v}$ – pomeranje (ugib) usled savijanja,
$\boldsymbol{\varphi}$ – ugao uvijanja usled momenta $\boldsymbol{M_O}$.

Ovakav na~in odre|ivanja polo`aja centra savijanja je zbog potrebe klasi~nog integraljenja veoma obiman, naro~ito ako je kontura slo`enijeg oblika.

U op{tem slu~aju, kada kontura nema ni jednu osu simetrije i kada te`i{ne ose nisu glavne ose ($I_{xy} \neq 0$), analogno prethodnom izvr{i}e se generalizacija postupka odre|ivanja centra savijanja.

Uop{tavanjem osnovnog uslova, datog izrazom (3.135), tj. da je za centar savijanja glavni moment tangencijalnih sila jednak nuli, glavni vektor tangencijalnih sila }e se redukovati na njihove rezultante Q_x i Q_y .

Transverzalne sile Q_x i Q_y le`e u odgovaraju}im me|usobno upravnim ravnima optere}enja, ~iji trag predstavlja geometrijsko mesto centara savijanja tj. osu savijanja.

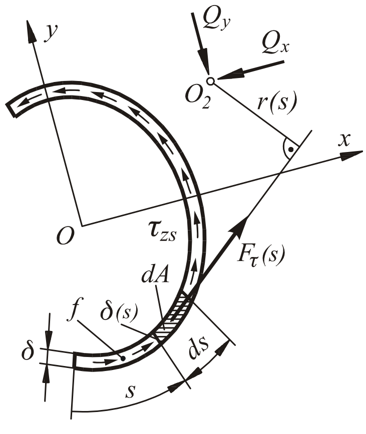
Prodor ose savijanja kroz ravan popre~nog preseka nosa~a je ta~ka tj. centar savijanja O_2 (Sl. 3.36). Indeks 2 je dodat ta~ki O zbog razlikovanja polova pri formiranju sektorskih koordinata $(\omega_1 \to O_1, \omega_2 \to O_2)$ u postupku koji sledi.

Za konturu proizvoljnog oblika (Sl. 3.36), uslov (3.135) za ta~ku O_2 glasi:

$$M_\tau = \int_A F_\tau(s) \cdot r(s) = 0, \tag{3.143}$$

gde je

$$F_\tau = \tau_{zs} \cdot dA = \tau_{zs} \cdot \delta \cdot ds. \tag{3.144}$$



Sl. 3.36

Imaju}i u vidu izraz (3.132) bi}e:

$$M_\tau = \int_A \left(\frac{Q_y \cdot S_x^{ots}}{I_x \cdot \delta_{(s)}} + \frac{Q_x \cdot S_y^{ots}}{I_y \cdot \delta_{(s)}} \right) \cdot \delta \cdot r(s) \cdot ds = 0, \tag{3.145}$$

gde su: $S_x^{ots} = \int_f y\,dA$, $S_y^{ots} = \int_f x\,dA$ – stati~ki momenti odse~aka konture za te`i{ne ose, a

$r(s)ds = d\omega_2$ – elementarna sektorska koordi-nata konture za pol u centru savijanja O_2.

Prema tome, bi}e:

$$M_\tau = \int_A \left(\frac{Q_y \cdot \int_f y\,dA}{I_x \cdot \delta_{(s)}} + \frac{Q_x \cdot \int_f x\,dA}{I_y \cdot \delta_{(s)}} \right) \cdot \delta \cdot d\omega_2 = 0\,, \tag{3.146}$$

gde su:

x, y – koordinate ta~aka konture u odnosu na te`i{ne ose,

f – povr{ina odse~ka konture za koju se ra~una stati~ki moment,

A – ukupna povr{ina konture popre~nog preseka,

$\delta(s)$ – debljina konture na mestu gde je stigla koordinata "*s*",

δ – debljina konture du` kretanja"*s*".

Ako postoji promena debljine konture, usvaja se srednja vrednost debljine konture po segmentima ($\delta = \delta_{sr}$).

Izraz (3.146), mo`e se napisati i u obliku:

$$\frac{Q_y \cdot \delta_{sr}}{I_x \cdot \delta_{(s)}} \int_A \int_f y\,dA\,d\omega_2 + \frac{Q_x \cdot \delta_{sr}}{I_y \cdot \delta_{(s)}} \int_A \int_f x\,dA\,d\omega_2 = 0 \, .$$

Nakon parcijalnog integraljenja, gde je kod prvog integrala uzeto da su:

$\int_f y\,dA = u \rightarrow y\,dA = du, \quad d\omega_2 = dv \rightarrow \omega_2 = v$, kao i analognim

smenama kod drugog integrala, dobija se:

$$\frac{Q_y \cdot \delta_{sr}}{I_x \cdot \delta_{(s)}} \left[\omega_2 \int_f y dA - \int_A \omega_2 y dA \right] + \frac{Q_x \cdot \delta_{sr}}{I_y \cdot \delta_{(s)}} \left[\omega_2 \int_f x\,dA - \int_A \omega_2\, x\,dA \right] = 0 \qquad (3.147)$$

Da bi izraz (3.147) uvek bio jednak nuli, potrebno je da izrazi u uglastim zagradama budu jednaki nuli, odnosno da su:

$$\omega_2 \int_f y dA - \int_A \omega_2\, y dA = 0 \, ,$$

$$\omega_2 \int_f x dA - \int_A \omega_2 x dA = 0 \, . \qquad (3.148)$$

Kada koordinata "*s*" pre|e celu konturu bi}e $f = A$, a kako su Ox i Oy te`i{ne ose, bi}e:

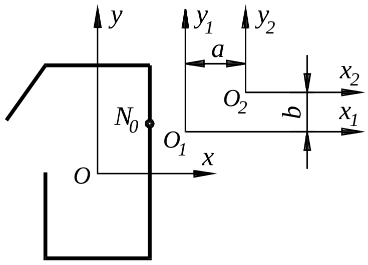
$$\int_A y dA = 0 \quad \text{i} \quad \int_A x dA = 0 \, .$$

Prema tome, uslovi koji odre|uju polo`aj centra savijanja glase:

$$\text{a)} \int_A \omega_2\, y dA = 0, \qquad \text{b)} \int_A \omega_2\, x dA = 0 \, . \qquad (3.149)$$

Po{to polo`aj centra savijanja O_2 za sada jo{ nije poznat, pa nije mogu}e formirati ω_2, potrebno je sprovesti etapu zamene sektorske koordinate ω_2 sa nekom proizvoljnom sektorskom koordinatom ω_1, formiranom za proizvoljno uzeti koordinatni sistem $x_1 O_1 y_1$ i ta~ku N_0. Pri tome, koristi se izraz (3.127), koji povezuje sektorsku koordinatu ω_2 sa pomo}nom sektorskom koordinatom ω_1 i u kome figuri{u nepoznate koordinate centra savijanja O_2 (a,b) (Sl. 3.37) u odnosu na koordinatni sistem $x_1 O_1 y_1$.

Na (Sl. 3.37) prikazan je jedan proizvoljan oblik konture popre~nog preseka tankozidog nosa~a. Koordinatni sistem $\boldsymbol{xOy}$ je postavljen u te`i{tu preseka, a paralelno sa njim se postavljaju sistemi $\boldsymbol{x_1\,O_1\,y_1}$ i $\boldsymbol{x_2\,O_2\,y_2}$. Koordinatni sistem $\boldsymbol{x_1 O_1\,y_1}$ je pogodniji za prakti~no re{avanje zadataka od koordinatnog sistema $\boldsymbol{xOy}$, jer se mo`e postaviti po volji, smanjuju}i tako obim ra~una na najmanju mogu}u meru.



Sl. 3.37

Zamenom izraza (3.127) u izraze (3.149), bi}e:

$$\int_A \omega_2\, y\, dA = \int_A \left[\omega_1 - a\left(y - y_0\right) + b\left(x - x_0\right)\right] y\, dA = 0\,, \tag{3.150a}$$

$$\int_A \omega_2\, x\, dA = \int_A \left[\omega_1 - a\left(y - y_0\right) + b\left(x - x_0\right)\right] x\, dA = 0\,. \tag{3.150b}$$

Kada se izvr{i mno`enje u prvom gornjem izrazu, (3.150a), dobija se:

$$\int_A \omega_1\, y\, dA - a\int_A y^2 dA + a y_0 \int_A y\, dA + b\int_A xy\, dA - b x_0 \int_A y\, dA = 0\,.$$

Kako je koordinatni sistem $\boldsymbol{xOy}$ te`i{ni, bi}e:

$$\int_A y\, dA = S_x = 0, \qquad \int_A y^2 dA = I_x\,, \qquad \int_A xy\, dA = I_{xy}\,,$$

tako da je sada:

$$\int_A \omega_2\, y\, dA = \int_A \omega_1\, y\, dA - a I_x + b I_{xy} = 0\,.$$

Analogno, iz izraza (3.150b) dobija se:

$$\int_A \omega_2\, x\, dA = \int_A \omega_1\, x\, dA - a I_{xy} + b I_y = 0\,, \quad \text{jer je} \quad S_y = \int_A x\, dA = 0\,.$$

Ako se u gornje izraze uvedu oznake za centrifugalne sektorske momente:

$I_{\omega 1 y} = \int_A \omega_1\, y dA$ i $I_{\omega 1 x} = \int_A \omega_1\, x dA$, dobija se sistem jedna~ina:

$$I_{\omega 1 x} - a\, I_{xy} + b\, I_y = 0$$

$$I_{\omega 1 y} - a\, I_x + b\, I_{xy} = 0$$

Re{avaju}i ovaj sistem po "$\boldsymbol{a}$" i "$\boldsymbol{b}$", dobija se polo`aj centra savijanja $\boldsymbol{O_2}$ u odnosu na proizvoljni pol $\boldsymbol{O_1}$, odnosno:

$$\boldsymbol{a} = \frac{-I_{\omega 1x}\, I_{xy} + I_{\omega 1y}\, I_y}{I_x\, I_y - I_{xy}^2}, \tag{3.151}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{I_{\omega 1y}\, I_{xy} - I_{\omega 1x}\, I_x}{I_x\, I_y - I_{xy}^2}. \tag{3.152}$$

Ako su te`i{ne ose $\boldsymbol{Ox}$ i $\boldsymbol{Oy}$ glavne ose inercije, onda je $\boldsymbol{I_{xy}=0}$, pa izrazi za koordinate centra savijanja imaju jednostavniji oblik:

$$\boldsymbol{a} = \frac{I_{\omega 1y}}{I_x} \tag{3.153}$$

$$\boldsymbol{b} = \frac{-I_{\omega 1x}}{I_y} \tag{3.154}$$

Prema tome, formiranje sektorske koordinate $\boldsymbol{\omega_1}$ ne zahteva nikakve uslove u pogledu izbora pola $\boldsymbol{O_1}$ i po~etne nulte ta~ke $\boldsymbol{N_0}$. Jedini uslov je da sistem $\boldsymbol{xOy}$ bude te`i{ni koordinatni sistem profila, da bi stati~ki momenti konture $\boldsymbol{S_x}$ i $\boldsymbol{S_y}$ bili jednaki nuli.

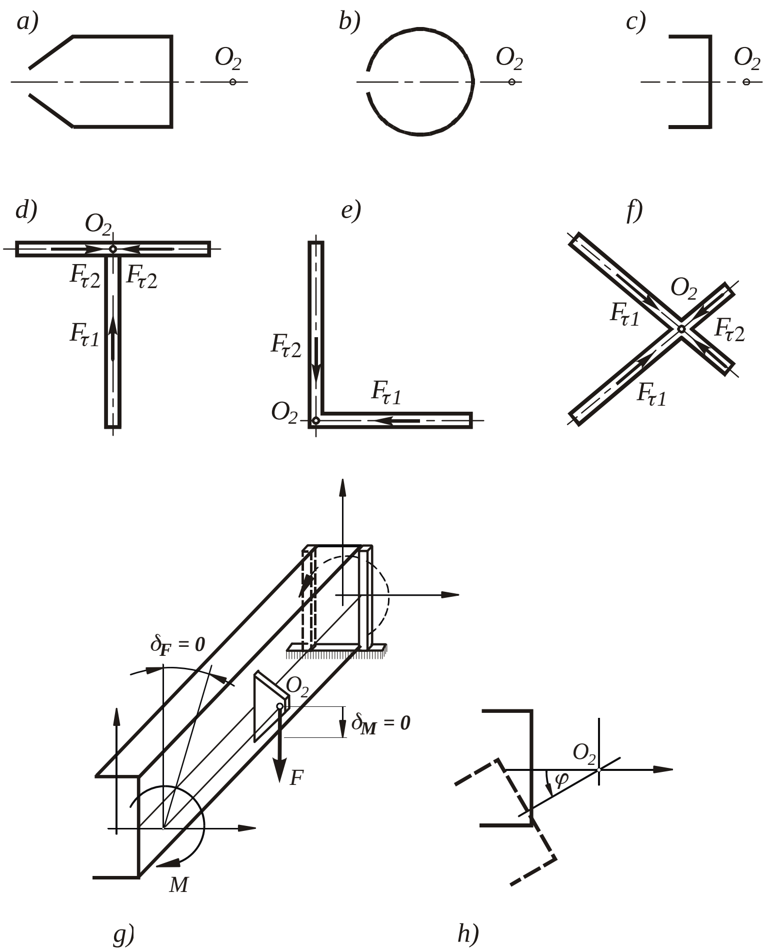
Pri odre|ivanju centra savijanja korisno je imati u vidu slede}e speci-fi~nosti, ~ijim se kori{}enjem apriori skra}uje obim ra~unanja:

a) Ako otvoreni tankozidi profil ima jednu osu simetrije, onda se centar savijanja nalazi na njoj, pa se koristi samo jedan od izraza (3.153) ili (3.154).

b) Ako otvoreni tankozidi profil ima jednu osu simetrije, a oblik konture se dobija rasecanjem zatvorene konture na jednom mestu, onda se centar savijanja nalazi na osi simetrije, ali van prostora koji obuhvata kontura (Sl. 3.38.a,b,c).

c) Ako tankozidi profil ima dve ose simetrije, onda se centar savijanja nalazi u preseku tih osa, tj. poklapa se sa te`i{tem preseka.

d) Ako se tankozidi profil sastoji iz vi{e tankih pravolinijskih segmenata koji se seku u jednoj ta~ki, onda se centar savijanja nalazi u toj ta~ki (Sl. 3.38.d,e,f), jer je moment svih tangencijalnih sila za tu ta~ku jednak nuli.



Sl. 3.38

Pored centra savijanja (centra smicanja) i ose savijanja, va`no je definisati i pojam **centra uvijanja**, odnosno **ose uvijanja** kao njihovog geometrijskog mesta u prostoru.

Neka na tankozidi {tap, vilju{kasto oslonjen, deluje koncentrisani moment uvijanja M i sila F koja prolazi kroz centar savijanja (Sl. 3.38.g). Kori{}enjem poznate teoreme o uzajamnosti radova dva nezavisna sistema optere}enja (teorema Betia), mo`e se napisati:

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\delta_F} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\delta_M} \,,$$

gde su:

δ_F - zaokretanje napadne tačke koncentrisanog momenta uvijanja M usled dejstva sile F

δ_M - projekcija pomeranja napadne tačke sile F, izazvanog delovanjem momenta uvijanja M, u pravcu njenog dejstva.

Po{to sila F prolazi kroz centar savijanja ona ne izaziva uvijanje {tapa, tako da je rotacija $\delta_F = 0$, tada, zbog uzajamnosti pomeranja (teorema Maksvela), mora da bude i $\delta_M = 0$, tj. nema linijskog pomeranja napadne ta~ke sile usled dejstva momenta uvijanja.

Prema tome, centar uvijanja je ona tačka u poprečnom preseku čije je pomeranje pri dejstvu momenta uvijanja jednako nuli, dok geometrijsko mesto centara uvijanja predstavlja osu uvijanja, odnosno nepomerljivu pravu liniju du` {tapa.

Imaju}i sve prethodno u vidu, lako je zaklju~iti da se centar savijanja i centar uvijanja poklapaju i da je to ta~ka oko koje presek rotira pri uvijanju {tapa (Sl. 3.38.h).

Kori{}enjem "vilju{kastog" oblika oslanjanja {tapa izbegnuto je preciznije razmatranje na~ina oslanjanja {tapa, jer vilju{kasti oslonac samo globalno onemogu}ava rotaciju {tapa oko podu`ne ose na mestu oslanjanja.

Kod ograni~enog uvijanja uvek je onemogu}ena rotacija na mestu oslonca, tako da se centar uvijanja poklapa sa centrom savijanja. Ovo je dokazano u poglavlju 3.10.4.

Me|utim, kod slobodnog uvijanja osa uvijanja zavisi i od na~ina oslanjanja {tapa i mo`e da bude bilo koja nepokretna osa pri uvijanju koja prolazi kroz ta~ke vezivanja krajeva {tapa i oko koje }e moment uvijanja zaokretati {tap.