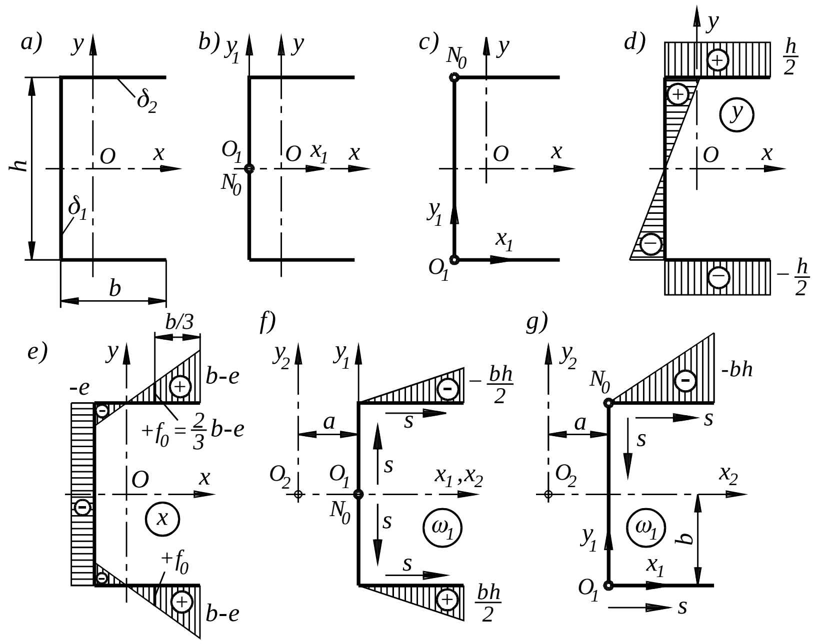
PRIMER 3.9.1

Odrediti polo`aj centra savijanja tankozidog profila prema (Sl. 3.39)**.**



Sl. 3.39

Re{enje:

Na osnovu oblika profila mo`e se konstatovati da kontura ima jednu osu simetrije, zbog ~ega slede slede}i zaklju~ci:

1. Te`i{ne ose su istovremeno i glavne te`i{ne ose, jer je za njih $I_{xy} = 0$.
2. Izrazi za izra~unavanje polo`aja centra savijanja imaju jednostavniji oblik.
3. Polo`aj centra savijanja se apriori nalazi na osi simetrije konture i to van prostora koji obuhvata kontura, dakle, levo od vertikalnog rebra konture (koordinata "***a***" treba da bude negativna u odnosu na koordinatni sistem $x_1 O_1 y_1$).

Kod odre|ivanja polo`aja centra savijanja, pri formiranju sektorske koordinate konture, izbor pola $O_1$ je potpuno proizvoljan. Dakle, on mo`e da bude u nekoj ta~ki konture, a i van nje. Isto tako, u ovom slu~aju je izbor po~etne ta~ke obilaska konture N_0 potpuno proizvoljan, i treba je birati tako da se formira najmanji broj sektorskih povr{ina, jer se tako smanjuje numeri~ki obim ra~unanja.

U narednom izlaganju dokaza}e se prethodne tvrdnje.

Ako se u prvoj varijanti usvoji pol O_1 na preseku ose simetrije i vertikalnog rebra konture, a po~etna ta~ka N_0 izabere tako da se poklapa sa polo`ajem pola O_1 (Sl. 3.39.b), onda }e grafik sektorske koordinate ω_1 biti kao na (Sl. 3.39.f).

Centrifugalni sektorski momenti konture (primenom Vere{}aginovog postupka) iznose:

$$I_{\omega 1x} = \int_A \omega_1\, x\, dA = \delta_2 \left[\left(-\frac{bh}{2}\cdot\frac{b}{2}\right)\cdot\left(+f_0\right)+\left(\frac{bh}{2}\cdot\frac{b}{2}\right)\cdot\left(+f_0\right)\right] = 0\,,$$

$$I_{\omega 1y} = \int_A \omega_1\, y\, dA = \delta_2 \left[\left(-\frac{bh}{2}\cdot\frac{b}{2}\right)\cdot\left(\frac{h}{2}\right)+\left(\frac{bh}{2}\cdot\frac{b}{2}\right)\cdot\left(-\frac{h}{2}\right)\right] = -\delta_2\frac{h^2 b^2}{4}\,,$$

$$I_x = \frac{\delta_1\cdot h^3}{12} + 2\delta_2 b\frac{h^2}{4} \cong \frac{\delta_1\cdot h^3}{12} + \frac{\delta_2\cdot b\cdot h^2}{2}\,.$$

Zbog numeri~kog reda veli~ina, tj. male debljine konture, zanemaren je sopstveni moment inercije pojaseva tankozidog profila.

Koordinate centra savijanja u odnosu na koordinatni sistem $x_1 O_1 y_1$ iznose:

$$a = \frac{I_{\omega 1y}}{I_x} = \frac{-\dfrac{\delta_2\cdot b^2\cdot h^2}{4}}{\dfrac{\delta_1\cdot h^3}{12}+\dfrac{\delta_2\cdot b\cdot h^2}{2}} = -\frac{3\delta_2 b^2}{\delta_1 h + 6\delta_2 b}\,,$$

$$b = -\frac{I_{\omega 1x}}{I_y} = 0 \;\rightarrow$$ dokaz da centar savijanja le`i na osi simetrije x.

Dokaz da izbor pola O_1 i po~etne ta~ke N_0 ne uti~e na apsolutni polo`aj centra savijanja, mo`e se pokazati izborom ovih ta~aka kao na (Sl. 3.39.c), pa je:

$$I_{\omega 1y} = \delta_2\left[\left(-hbb\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{h}{2}\right] = -\delta_2\frac{b^2 h^2}{4}\,.$$

Koordinata "a" je ista kao u prethodnom slu~aju, odnosno:

$$a = \frac{I_{\omega 1y}}{I_x} = -\frac{3\delta_2 b^2}{\delta_1 h + 6\delta_2 b}\,,$$

dok druga koordinata treba da bude:

$$b = \frac{-I_{\omega 1x}}{I_y} = \frac{h}{2}.$$

Da bi se dobio ovaj rezultat, potrebno je prvo odrediti polo`aj te`i{ta. Usvojena odmerna osa je du` srednje linije vertikalnog rebra, pa polo`aj te`i{ta iznosi:

$$e = \frac{2b\delta_2\dfrac{b}{2}}{2b\delta_2 + h\delta_1} = \frac{\delta_2 b^2}{2b\delta_2 + h\delta_1}\,.$$

Moment inercije za osu ***Oy*** (zanemaruju}i sopstveni moment inercije vertikalnog rebra zbog reda veli~ina) iznosi:

$$\boldsymbol{I_y = \delta_1 h e^2 + \frac{2\delta_2 b^3}{12} + 2b\delta_2 \left(\frac{b}{2} - e\right)^2} .$$

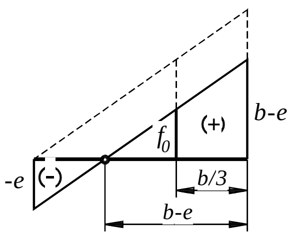
Zamenom veli~ine "***e***" i nakon sre|ivanja, dobija se:

$$\boldsymbol{I_y = \frac{\delta_2 b^3 \left(\delta_2 b + 2\delta_1 h\right)}{3\left(2\delta_2 b + \delta_1 h\right)}} .$$

Centrifugalni sektorski moment konture iznosi:

$$\boldsymbol{I_{\omega 1x} = \delta_2 \left(-\frac{bh^2}{2}\right) f_0} ,$$

gde je prema (Sl. 3.40) $\boldsymbol{f_0 = \frac{2}{3} b - e}$, tako da je



Sl. 3.40

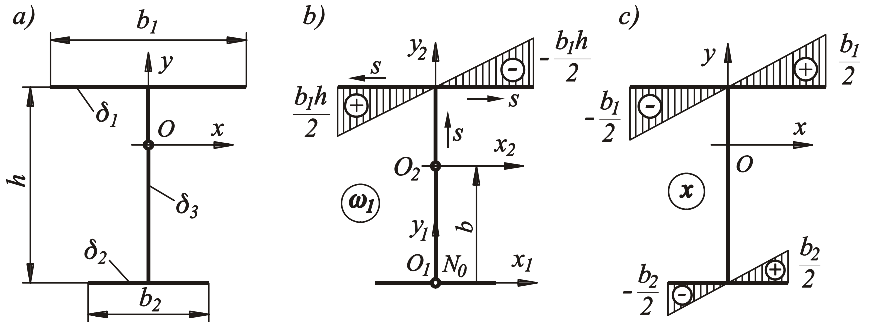
$$\boldsymbol{I_{\omega 1x} = -\delta_2 \frac{h}{2} b^3 \frac{\delta_2 b + 2\delta_1 h}{3\left(2\delta_2 b + \delta_1 h\right)}} .$$

Kona~no, dobija se:

$$\boldsymbol{b = -\frac{-\delta_2 \dfrac{h}{2} b^3 \dfrac{\delta_2 b + 2\delta_1 h}{3\left(2\delta_2 b + \delta_1 h\right)}}{\delta_2 b^3 \dfrac{\delta_2 b + 2\delta_1 h}{3\left(2\delta_2 b + \delta_1 h\right)}} = +\frac{h}{2}} .$$

PRIMER 3.9.2

Na}i polo`aj centra savijanja za tankozidi profil prema (Sl. 3.41.a).



Sl. 3.41

Re{enje:

Po{to presek ima osu simetrije, centar savijanja se nalazi na njoj. Polo`aj centra savijanja u odnosu na proizvoljno izabran pol $\boldsymbol{O_1}$, prema izrazu (3.154) iznosi:

$$\boldsymbol{b = -\frac{I_{\omega 1x}}{I_y}},$$

gde su:

$$\boldsymbol{I_{\omega 1x} = \int_A \omega_1 x dA = \delta_1 \left[\frac{b_1 h}{2} \cdot \frac{b_1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left(-\frac{b_1}{2} \right) + \left(-\frac{b_1 h}{2} \cdot \frac{b_1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{b_1}{2} \right]},$$

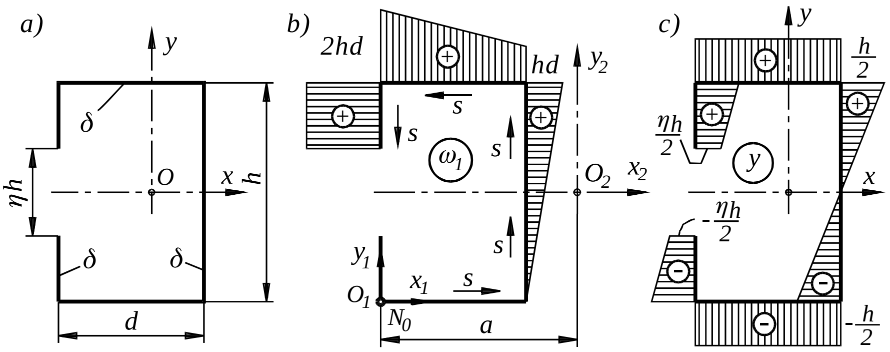
$$\boldsymbol{I_{\omega 1x} = -\frac{\delta_1 b_1^3 h}{12} = -I_{1y} \cdot h},$$

$$\boldsymbol{I_y \cong \frac{\delta_1 b_1^3}{12} + \frac{\delta_2 b_2^3}{12} = I_{1y} + I_{2y}}, \text{ pa je}$$

$$\boldsymbol{b = \frac{I_{1y} \cdot h}{I_{1y} + I_{2y}}} \text{ , ako je } \boldsymbol{I_{1y} > I_{2y}} \text{ onda je } \boldsymbol{b > \frac{h}{2}}.$$

PRIMER 3.9.3

Na}i polo`aj centra savijanja za tankozidi profil prema (Sl. 3.42)



Sl. 3.42

Re{enje: Centar savijanja se nalazi na osi simetrije, van povr{ine koju kontura obuhvata, a na rastojanju prema izrazu (3.153):

$$a = \frac{I_{\omega 1y}}{I_x},$$

gde je $\quad I_x \cong \dfrac{\delta h^3}{12} + \dfrac{\delta\, d\, h^2}{2} + \dfrac{\delta}{12}\left(h^3 - \eta^3 h^3\right).$

Veli~ina otvora, definisana je parametrom η.

Ako je $\eta = 0$, onda se smatra da je kontura na tom mestu prese~ena kao "`iletom".

Ako je $\eta = 1$, onda se dobija kontura kao u primeru (3.9.1).

Uvode}i oznaku $\rho = \dfrac{d}{h}$, dobija se:

$$I_x = \frac{\delta h^3}{12}\left(2 + 6\rho - \eta^3\right),$$

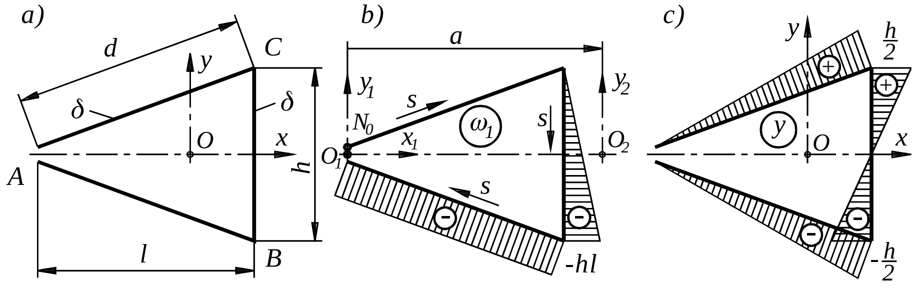
$$I_{\omega 1y} = \int_A \omega_1 y dA = \delta\left[\frac{h^2 d}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2} + \frac{2hd + hd}{2}\cdot d\cdot\frac{h}{2} + 2hd\left(\frac{h}{2} - \frac{\eta h}{2}\right)\cdot\left(\frac{h}{2} + \frac{\eta h}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right],$$

$$I_{\omega 1y} = \frac{\delta h^3 d}{12}\left(4 + 9\rho - 3\eta^2\right),$$

$$a = \frac{\dfrac{\delta h^3 d}{12}\left(4 + 9\rho - 3\eta^2\right)}{\dfrac{\delta h^3}{12}\left(2 + 6\rho - \eta^3\right)} = d\,\frac{4 + 9\rho - 3\eta^2}{2 + 6\rho - \eta^3}.$$

PRIMER 3.9.4

Na}i polo`aj centra savijanja otvorenog tankozidog profila prikazanog na (Sl. 3.43.a). Otvoreni profil je dobijen tankim rezom (kao "`iletom") u temenu.



Sl. 3.43

Re{enje:

Centar savijanja nalazi se na osi simetrije, van konture, na rastojanju:

$$a = \frac{I_{\omega 1y}}{I_x},$$

gde je $\quad I_x = \int_A y^2 dA = \int_A y \cdot y dA = \delta \int_0^s y \cdot y ds$.

Kako je promena koordinate (y) du` konture linearna zbog njenih pravolinijskih segmenata, ispunjen je uslov za primenu Vere{~aginovog postupka pri izra~unavanju momenata inercije, odnosno dobija se da je:

$$I_x = \delta\left(\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot 2 + \frac{h}{2}\cdot d\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot 2\right) = \frac{\delta h^2}{12}\left(h + 2d\right)$$

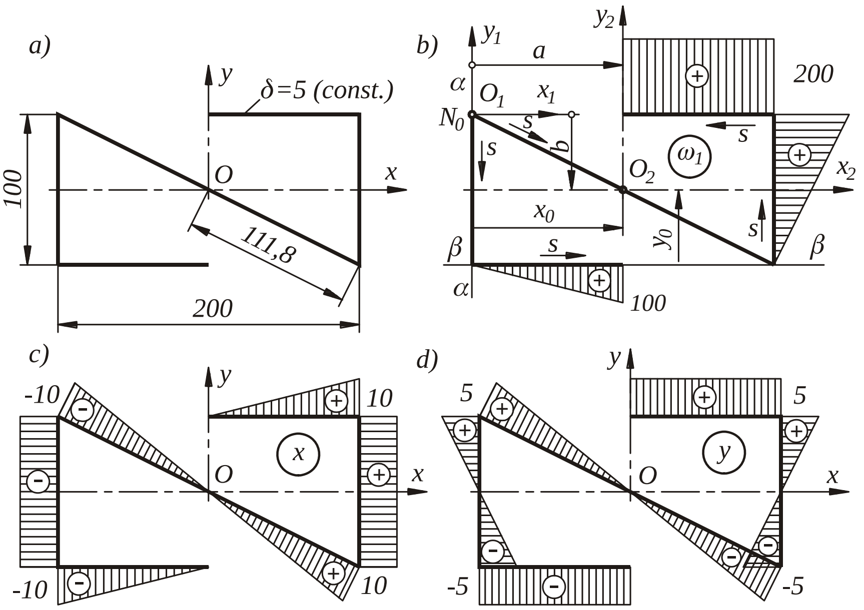
Kako je $\quad I_{\omega 1y} = \int_A \omega_1 y dA = \delta\int_0^s \omega_1 y ds = \delta\left[\left(-h\cdot l\cdot h\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\right) + \left(-h\cdot l\cdot d\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{h}{2}\right)\right]$

$$I_{\omega 1y} = \frac{\delta\cdot h^2\cdot l}{12}\left(h + 3d\right),$$ dobija se kona~no:

$$a = \frac{\frac{\delta\cdot h^2\cdot l}{12}\left(h+3d\right)}{\frac{\delta\cdot h^2}{12}\left(h+2d\right)} = l\,\frac{h+3d}{h+2d} \quad , \quad a > l \ .$$

PRIMER 3.9.5

Dokazati da se kod tankozidog otvorenog profila prikazanog na (Sl. 3.44.a), **centar savijanja poklapa sa te`i{tem konture.**



Sl. 3.44

Re{enje:

Prikazana tankozida kontura je kososimetri~na, pa prikazane te`i{ne ose nisu glavne ose, tako da za odre|ivanje centra savijanja treba koristiti izraze (3.151) i (3.152), odnosno:

$$a = \frac{I_{\omega 1y}\, I_y - I_{\omega 1x}\, I_{xy}}{I_x\, I_y - I_{xy}^2} \quad , \qquad b = \frac{I_{\omega 1y}\, I_{xy} - I_{\omega 1x}\, I_x}{I_x\, I_y - I_{xy}^2}$$

Polo`aj te`i{ta konture u odnosu na ose $\alpha - \alpha$ i $\beta - \beta$ (Sl. 3.44.b) iznosi:

$$x_0 = \frac{22,36 \cdot 0,5 \cdot 10 + 10 \cdot 0,5 \cdot 5 + 10 \cdot 0,5 \cdot 20 + 10 \cdot 0,5 \cdot 15}{22,36 \cdot 0,5 + 4 \cdot 10 \cdot 0,5} = 10\ cm$$

$$y_0 = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 5 + 22,36 \cdot 0,5 \cdot 5 + 10 \cdot 0,5 \cdot 10}{22,36 \cdot 0,5 + 4 \cdot 10 \cdot 0,5} = 5\ cm$$

Za odre|ivanje momenata inercije konture, iskoristi}e se Vere{~aginov postupak po{to su funkcije x i y linearne.

$$I_x = \int_A y^2 dA = \delta \int_0^s y \cdot y ds = 0{,}5 \left[\left(5 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) \cdot 4 + \left(5 \cdot 10 \cdot 5 + 11{,}18 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) \cdot 2 \right],$$

$$I_x = 426{,}5 \ cm^4 .$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \delta \int_A x \cdot x ds = 0{,}5 \left(10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 + 10 \cdot 10 \cdot 10 + 11{,}18 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 \right) \cdot 2 ,$$

$$I_y = 1706 \quad cm^4 .$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \delta \int_A xy ds = 0{,}5 \left[10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + \left(-10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot (-5) + \left(-10 \cdot 11{,}18 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \right) + \right.$$

$$\left. + \left(10 \cdot 11{,}18 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-5) \right] = 63{,}66 \ cm^4 .$$

Centrifugalni sektorski momenti konture iznose:

$$I_{\omega 1x} = \int_A \omega_1 x \, dA = 0{,}5 \left[100 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (-10) + 200 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 + 200 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} 10 \right],$$

$$I_{\omega 1x} = 9166{,}67 \ cm^5 ,$$

$$I_{\omega 1y} = \int_A \omega_1 y \, dA = 0{,}5 \left[100 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-5) + 200 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5 + 200 \cdot 10 \cdot 5 \right],$$

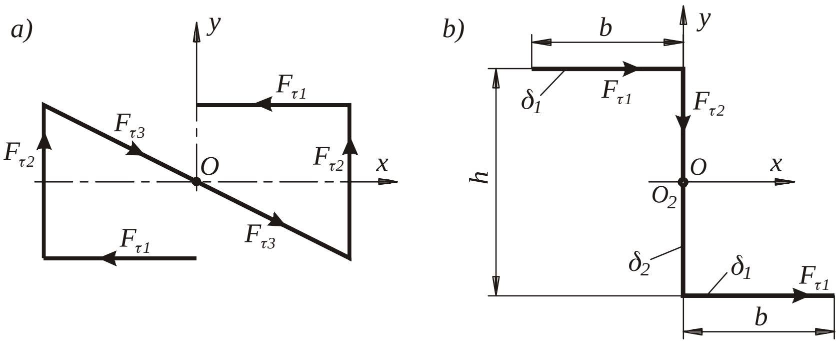
$$I_{\omega 1y} = 4583{,}33 \ cm^5 .$$

Zamenom dobijenih veli~ina, koordinate centra savijanja O_2 iznose:

$$a = \frac{4583{,}33 \cdot 1706 - 9166{,}67 \cdot 63{,}66}{426{,}5 \cdot 1706 - 63{,}66^2} = 10 \ cm ,$$

$$b = \frac{4583{,}33 \cdot 63{,}66 - 9166{,}67 \cdot 426{,}5}{426{,}5 \cdot 1706 - 63{,}66^2} = -5 \ cm .$$

Dakle, kod kososimetri~nih profila se centar savijanja poklapa sa te`i{tem konture zato {to je moment tangencijalnih sila $F_{\tau i}$ za te`i{te O jednak nuli (Sl. 3.45.a,b).


a)
y
$F_{\tau 1}$
$F_{\tau 3}$
$F_{\tau 2}$
O
$F_{\tau 2}$
x
$F_{\tau 3}$
$F_{\tau 1}$
b)
b
y
δ_1
$F_{\tau 1}$
$F_{\tau 2}$
h
O
x
O_2
δ_2
δ_1
$F_{\tau 1}$
b

Sl. 3.45