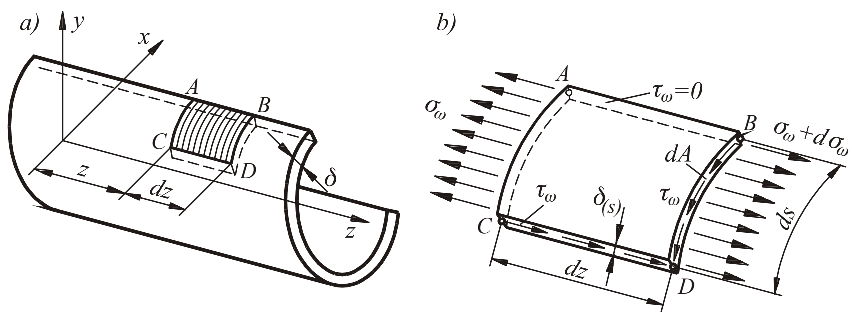
3.10.6 Tangencijalni naponi usled ograničenog uvijanja

Kona~no, preostalo je da se defini{u tangencijalni naponi kod ograni~enog uvijanja $\boldsymbol{\tau_\omega}$, koji se javljaju zbog promene normalnih napona $\boldsymbol{\sigma_\omega}$ po du`ini {tapa (Sl. 3.78), usled promene bimomenta.

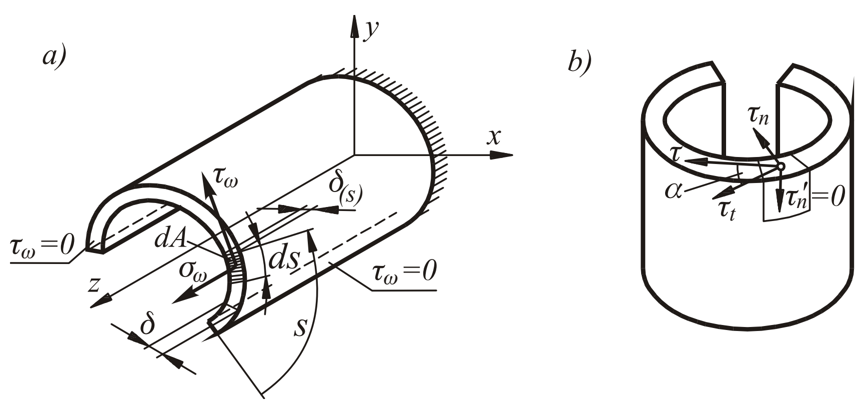


Sl. 3.78

Elementarni deli} ABCD po~inje od bo~ne ivice konture (s=0), jer je na njoj tangencijalni napon $\boldsymbol{\tau_\omega = 0}$ (nema nikakvih sila du` ivice), tako da je u nekoj ta~ki konture odre|enoj koordinatom "***s***" vrednost napona $\boldsymbol{\tau_\omega}$ apsolutna. Dakle, pri odre|ivanju tangencijalnih napona, koordinata "***s***" polazi uvek od slobodne ivice konture.

Pretpostavljaju}i da vektor ukupnog tangencijalnog napona τ u posmatranoj ta~ki deluje pod nekim uglom α u odnosu na konturu (Sl. 3.79.b), njegove komponente bi bile: $\boldsymbol{\tau_n = \tau \cdot \sin\alpha}$ i $\boldsymbol{\tau_t = \tau \cdot \cos\alpha}$.

Na osnovu osobine konjugovanosti tangencijalnih napona, sledi da je: $\boldsymbol{\tau_n = \tau'_n}$,



Sl. 3.79

Kako na bo~nim povr{inama elementa nema nikakvih povr{inskih sila, bi}e $\tau_n' = 0$, to jest bi}e:

$$\tau_n = \tau_n' = 0 = \tau \sin\alpha \rightarrow \sin\alpha = 0\,,\ \alpha = 0\ ,$$

pa je

$$\tau_t = \tau .$$

Prema tome, pravac ukupnog tangencijalnog napona poklapa se sa tangentom konture u posmatranoj ta~ki popre~nog preseka. Za usvojene smerove napona prema (Sl. 3.78), a na osnovu ravnote`e sila u pravcu ose Oz , bi}e:

$$\left(\sigma_\omega + d\sigma_\omega - \sigma_\omega\right)dA + \tau_\omega \delta(s) dz = 0\ ,$$

$$d\sigma_\omega dA = -\,\tau_\omega \delta(s) dz\ .$$

Apriori pretpostavljeni smer konjugovanog napona τ_ω u ravni konture (od B do D) je u smeru sa porastom teku}e koordinate "s" (Sl. 3.78.b), mada }e se njegov pravi smer utvrditi kasnije.

Prira{taj normalnog napona $d\sigma_\omega$ je samo u pravcu ose Oz, tako da se normalna sila menja samo sa pove}anjem povr{ine konture pre|ene sa koordinatom "s". Debljina konture δ smatra se konstantnom na delu integraljenja ($dA=\delta \cdot ds$), tako da za odse~ak konture ~ija je povr{ina $f=\delta \cdot s$, tangencijalni napon iznosi:

$$\tau_\omega = -\frac{1}{\delta(s)} \int_f \frac{d\sigma_\omega}{dz}\, dA\,, \qquad \text{a kako je} \quad \sigma_\omega = -\,E\,\omega\,\frac{d\theta}{dz}\ ,$$

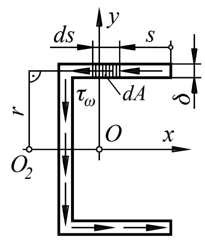
bi}e

$$\tau_\omega = \frac{1}{\delta(s)} \int_f E\,\frac{d^2\theta}{dz^2}\,\omega\, dA = \frac{E}{\delta(s)}\,\frac{d^2\theta}{dz^2} \int_f \omega\, dA\ ,$$

odnosno:

$$\tau_\omega = \frac{E}{\delta(s)}\,\frac{d^2\theta}{dz^2}\, S_\omega^{ots}\ . \qquad (3.205)$$

Ako se izvr{i integraljenje momenta elementarne tangencijalne sile u odnosu na centar uvijanja (po celoj povr{ini konture A), dobi}e se moment ograni~enog uvijanja M_ω , (Sl. 3.80).



Sl. 3.80

$$M_\omega = \int_A \tau_\omega \, r \, dA \; ,$$

$$M_\omega = \int_A \left(\frac{E}{\delta} \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_f \omega \, dA \right) \delta \cdot r \, ds \, ,$$

$$M_\omega = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_A \left(\int_f \omega \, dA \right) d\omega \; .$$

Parcijalnim integraljenjem, gde su:

$$u = \int_f \omega dA, \qquad du = \omega dA, \qquad dv = d\omega, \qquad v = \omega,$$

dobija se

$$\int_A \left(\int_f \omega \, dA \right) d\omega = \omega \int_f \omega \, dA \Bigg|_{f=0}^{f=A} - \int_A \omega^2 dA = -I_\omega \; .$$

Prvi integral u gornjem izrazu je sektorski stati~ki moment glavne sektorske koordinate. On je jednak nuli, kada je segmentna povr{ina konture $f = 0$, kao i kada je obuhva}ena cela kontura $f = A$, tako da kona~an izraz za moment ograni~enog uvijanja glasi:

$$M_\omega = -EI_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} \; . \qquad (3.206)$$

Zamenom (3.206) u (3.205), dobija se izraz za tangencijalni napon usled ograni~enog uvijanja na mestu odse~ka konture odre|enog koordinatom "s":

$$\tau_\omega^s = -\frac{M_\omega \cdot S_\omega^{ots}}{I_\omega \cdot \delta(s)} \, , \qquad (3.207)$$

gde je **δ(s)** – debljina konture na mestu odse~ka odre|enog koordinatom "s".

Smer toka tangencijalnih napona τ_ω zavisi od znakova za M_ω i S_ω, saglasno ve} usvojenim konvencijama.

Ako se kao rezultuju}i znak na desnoj strani izraza (3.207) dobije (+), onda je smer toka napona u smeru "s", a ako je rezultuju}i znak (–), onda je smer toka napona suprotan od smera "s".

Obilazak po konturi sa koordinatom "s" uvek se zapo~inje od slobodnih ivica konture, a {to je ve} prethodno obrazlo`eno.

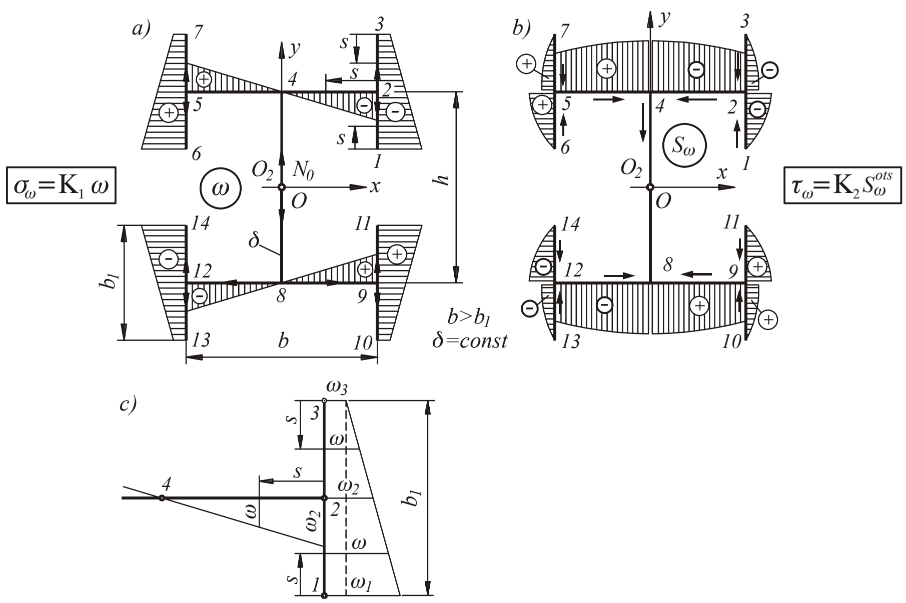
Promena tangencijalnih napona τ_ω, za δ = ***const*** du` cele konture, direktno je proporcionalna sektorskom stati~kom momentu:

$$S_{\omega}^{ots} = \int_{f} \omega \, dA \, .$$

Ako kontura u nekim svojim delovima ima trenutnu promenu debljine, napon }e se obrnuto proporcionalno promeni debljine skokovito menjati.

Integrale}i postepeno po odse~cima konture (simbol "*f*") glavnu sektorsku koordinatu, dobi}e se promena sektorskog stati~kog momenta po konturi. Vrednost odse~ka sektorskog stati~kog momenta u posmatranoj ta~ki konture, numeri~ki je jednaka povr{ini dijagrama glavne sektorske koordinate na du`ini odse~ka.

Za prakti~nu ilustraciju postupka, usvoji}e se kontura kao na (Sl. 3.81.a), kod koje se apriori zna polo`aj centra savijanja $O_2$. Po{to se zna i polo`aj glavne nulte ta~ke N_0, formira se odmah glavna sektorska koordinata ω (Sl. 3.81.a).



Sl. 3.81

Vrednosti sektorske koordinate u numerisanim ta~kama konture iznose:

$$\omega_1 = -\frac{hb}{4} - \frac{b_1 b}{4} = \omega_{14}, \qquad \omega_6 = \omega_{11} = -\omega_1 \, ,$$

$$\omega_2 = -\frac{hb}{4} = \omega_{12}, \qquad \omega_5 = \omega_9 = -\omega_2 \, ,$$

$$\omega_3 = -\frac{hb}{4} + \frac{b_1 b}{4} = \omega_{13}, \qquad \omega_7 = \omega_{10} = -\omega_3 \, .$$

Promena koordinate ω u zavisnosti od "*s*" (koja polazi od ta~ke 1 (Sl.3.81.c)) iznosi:

$$\omega = (\omega_1 - \omega_3)\frac{b_1 - s}{b_1} + \omega_3 = \omega_1 - (\omega_1 - \omega_3)\frac{s}{b_1} \; ,$$

$dA = \delta \cdot ds$, $\delta = const.$ du` cele konture.

Sektorski stati~ki moment konture na odse~ku 1 ÷ 2 iznosi:

$$S_\omega^{1\div2} = \delta \int_0^{\frac{b_1}{2}} \omega \, ds = \delta \int_0^{\frac{b_1}{2}} \left[\omega_1 - (\omega_1 - \omega_3)\frac{s}{b_1} \right] ds = \delta \left[s\omega_1 - (\omega_1 - \omega_3)\frac{s^2}{2b_1} \right]_0^{\frac{b_1}{2}} \; ,$$

$$S_\omega^{(1)} = 0, \qquad S_\omega^{(2)} = -\,\delta \left(\frac{hb}{2} + \frac{b_1 b}{4} \right) \frac{b_1}{4} \; .$$

Dakle, numeri~ka vrednost $S_\omega^{(2)}$ jednaka je povr{ini dijagrama ω na delu od 1 do 2, odnosno:

$$S_\omega^{(2)} = (\omega_1 + \omega_2)\,\frac{b_1}{4} \; .$$

Kako se kontura u ta~ki 2 ra~va, treba izvr{iti integraljenje sektorske koordinate dela konture od 3 ÷ 2. Sada "**s**"polazi od ta~ke 3 (Sl. 3.81.c), tako da je:

$$S_\omega^{3\div2} = \delta \int_0^{\frac{b_1}{2}} \left[(\omega_1 - \omega_3)\frac{s}{b_1} + \omega_3 \right] ds = \delta \left[(\omega_1 - \omega_3)\frac{s^2}{2b_1} + s\omega_3 \right]_0^{\frac{b_1}{2}} \; ,$$

$$S_\omega^{(3)} = 0, \qquad S_\omega^{(2)} = \delta \left(-\frac{hb}{2} + \frac{b_1 b}{4} \right) \frac{b_1}{4} \; .$$

Za deo konture od ta~ke 2 do ta~ke 4 bi}e:

$$S_\omega^{2\div4} = S_\omega^{1\div2} + S_\omega^{3\div2} + \delta \int_0^{\frac{b}{2}} \omega_2 \left(1 - \frac{2s}{b} \right) ds \; ,$$

$$S_\omega^{2\div4} = -\,\delta\,\frac{hbb_1}{4} + \delta \left[\omega_2 \left(s - \frac{s^2}{b} \right) \right] \Bigg|_0^{\frac{b}{2}} \; ,$$

$$S_\omega^{(2)} = -\delta\,\frac{hbb_1}{4} \; , \quad S_{\omega\,desno}^{(4)} = -\delta \left(\frac{hbb_1}{4} + \frac{hb^2}{16} \right) .$$

Sada se ponavlja postupak na levom delu konture, gde se integrale pozitivne vrednosti glavne sektorske koordinate, tako da se dobija:

$$S_{\omega,levo}^{(4)} = +\delta \left(\frac{hbb_1}{4} + \frac{hb^2}{16} \right) .$$

Prelaze}i na rebro profila, izvr{i}e se sabiranje sektorskih stati~kih momenata levog i desnog dela pojasa:

$$S_{\omega}^{4\div 8} = S_{\omega,levo}^{(4)} + S_{\omega,desno}^{(4)} + \delta\int_{0}^{h}\omega ds = 0 \ ,$$

jer je i sektorska koordinata na delu (4 ÷ 8) jednaka nuli.

S obzirom da na rebru profila nema napona od ograni~enog uvijanja ($\sigma_{\omega}^{4\div 8} = 0$, $\tau_{\omega}^{4\div 8} = 0$), zaklju~uje se da rebro nema deplanaciju ($w = -\theta\cdot\omega = 0$).

Najve}e deplanacije preseka, a samim tim i najve}i normalni naponi σ_{ω} , javljaju se u ivi~nim vlaknima pojasnih delova (ta~ke 1, 6, 11, 14), dok se najve}i tangencijalni napon ograni~enog uvijanja τ_{ω} javlja u presecima pojasne konture blisko levo ili blisko desno od ta~aka 4 i 8. Promena napona σ_{ω} i τ_{ω} proporcionalna je promenama "ω" i "S_{ω}" po konturi i prikazana je na (Sl.3.81.b), jer je:

$$\sigma_{\omega} = \frac{B}{I_{\omega}}\cdot\omega = K_1\cdot\omega \quad , \qquad \tau_{\omega} = -\frac{M_{\omega}}{I_{\omega}\cdot\delta_{const}}\cdot S_{\omega}^{ots} = K_2\cdot S_{\omega}^{ots} \, .$$