3.10.7 Diferencijalna jednačina za određivanje ugla uvijanja po jedinici dužine

Diferencijalna jedna~ina za odre|ivanje ugla uvijanja po jedinici du`ine θ, dobija se zamenom izraza (3.155) i (3.206) u jedna~inu ravnote`e unutra{njih i spolja{njih momenata uvijanja (3.163), koja glasi:

$$M_\omega + M_\theta = M_0 \text{ , odnosno}$$

$$EI_\omega \frac{d^2\theta}{dz^2} - G\,I_t\,\theta = -M_0 \,,$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \frac{GI_t}{EI_\omega}\theta = -\frac{M_0}{E\,I_\omega}\cdot\frac{G\,I_t}{G\,I_t} \,, \qquad \alpha^2 = \frac{GI_t}{EI_\omega} \,,$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2\frac{M_0}{GI_t} \,. \tag{3.208}$$

Op{te re{enje ove diferencijalne jedna~ine glasi:

$$\theta = A_1 e^{\alpha z} + A_2 e^{-\alpha z} + \theta_p \,, \tag{3.209}$$

gde je θ_p – partikularno re{enje zavisno od oblika spoljnjeg optere}enja.

S obzirom na poznate relacije izme|u eksponencijalnih i hiperboli~kih funkcija:

$$e^{\alpha z} = ch\alpha z + sh\alpha z \;, \qquad e^{-\alpha z} = ch\alpha z - sh\alpha z \;,$$

mo`e se op{te re{enje napisati u prikladnijem obliku za njegovo konkretno odre|ivanje u uslovima zadatka, odnosno:

$$\theta = C_1 ch\alpha z + C_2 sh\alpha z + \theta_p \,, \tag{3.210}$$

gde su: $C_1 = A_1 + A_2$, i $C_2 = A_1 - A_2$.

Konstante C_1 i C_2 odre|uju se iz uslova na krajevima štapa (Tabela 3.4).

Ako je spoljni moment uvijanja du` {tapa $M_0$ konstantan po celoj dužini štapa, desna strana diferencijalne jedna~ine predstavlja polinom nultog stepena, a kako je i najni`i izvod funkcije θ nultog reda, partikularno re{enje je konstanta, tj.:

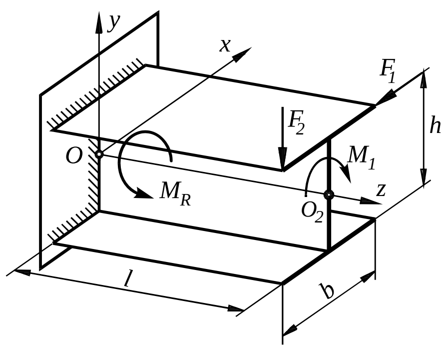
$$\theta_p = \frac{M_0}{GI_t} \,. \tag{3.211}$$

POKAZNI PRIMER

Na primeru prikazanom na (Sl. 3.82), pokaza}e se odre|ivanje ugla uvijanja po jedinici dužine "θ". Moment uvijanja du` elementa (teku}i moment uvijanja) iznosi:

$$M_0 = M_R = F_1 \frac{h}{2} + F_2 \frac{b}{2} - M_1 = const.,$$

i neka M_R ima smer kao na (Sl. 3.82), po{to intenziteti F_1, F_2 i M_1 nisu zadati.



Sl. 3.82

1. Za $z = 0$, $w = 0$, pa je $\theta = 0$
   (mesto krutog ukle{tenja)

2. Za $z = l$, $\sigma_\omega = 0$, pa je $B = 0$, odnosno $\frac{d\theta}{dz} = 0$.

Zamenom prvog uslova u op{te re{enje (3.210), dobija se:

$$0 = C_1 ch\alpha \cdot 0 + C_2 sh\alpha \cdot 0 + \frac{M_R}{GI_t} \rightarrow C_1 = -\frac{M_R}{GI_t},$$

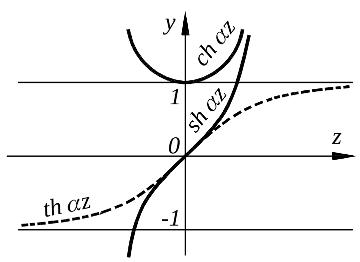
Kako je $\frac{d\theta}{dz} = C_1 \alpha\, sh\alpha z + C_2 \alpha\, ch\alpha z$,

drugi uslov daje: $0 = C_1 \alpha\, sh\alpha l + C_2 \alpha\, ch\alpha l \rightarrow C_2 = -C_1 \frac{sh\alpha l}{ch\alpha l} = \frac{M_R}{GI_t} th\alpha l$.

Konačno rešenje diferencijalne jedna~ine glasi:

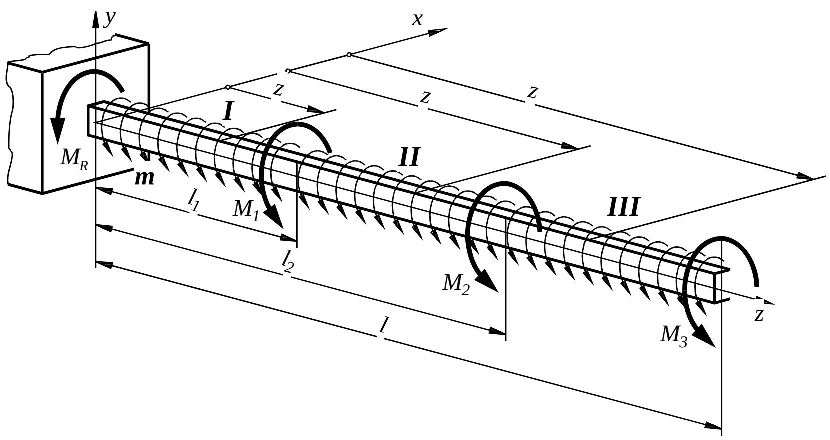
$$\theta = -\frac{M_R}{GI_t} ch\alpha z + \frac{M_R}{GI_t} th\alpha t \cdot sh\alpha z + \frac{M_R}{GI_t},$$

Osnovne relacije hiperbolnih funkcija *Tabela 3.3*

	$ch\alpha z = \frac{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}{2}\ ,\ sh\alpha z = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{2}$ $th\alpha z = \frac{sh\alpha z}{ch\alpha z} = \frac{e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}}{e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}}$ $ch^2\alpha z - sh^2\alpha z = 1$ $ch\alpha(z_1 \pm z_2) = ch\alpha z_1 ch\alpha z_2 \pm sh\alpha z_1 sh\alpha z_2$ $sh\alpha(z_1 \pm z_2) = sh\alpha z_1\, ch\alpha z_2 \pm ch\alpha z_1\, sh\alpha z_2$
$\int ch\alpha z \cdot dz = \frac{1}{\alpha} sh\alpha z$ $\int sh\alpha z \cdot dz = \frac{1}{\alpha} ch\alpha z$	$\frac{\partial}{\partial z}(ch\alpha z) = \alpha\, sh\alpha z$ $\frac{\partial}{\partial z}(sh\alpha z) = \alpha\, ch\alpha z$

ŠTAP SA VIŠE POLJA

Ako štap ima više polja u kojima deluju koncentrisani i raspodeljeni momenti uvijanja (Sl. 3.83), partikularno rešenje treba da zadovolji neprekidnost funkcija $\boldsymbol{\theta(z)}$ i $\boldsymbol{\theta'(z)}$ na granici dve susedne deonice.



Sl. 3.83

Rezultujući moment uvijanja $\boldsymbol{M_R}$ na strani preseka u blizini ukleštenja $\boldsymbol{z=0}$ (osa "z" je usmerena prema posmatraču), jednak je po intenzitetu reakciji ukleštenja, ali je suprotnog smera. Prema tome, $\boldsymbol{M_R}$ ima smer dominantnog aktivnog opterećenja.

$$\boldsymbol{M_R = \sum M_i = +\left(M_1 + M_2 + M_3 + m \cdot l\right)}$$ - smer i znak $\boldsymbol{M_R}$-a su pozitivni

$\boldsymbol{m = q \cdot e}$ ($\boldsymbol{q}$ - kontinualna te`ina elementa, $\boldsymbol{e}$ - rastojanje od te`i-{ta preseka do centra uvijanja)

Saglasno smerovima zadatog optere}enja (Sl. 3.83) i konvenciji za pozitivan smer pri njihovom sumiranju, dobijen je znak "+". To zna~i da je smer rezultuju}eg momenta $\boldsymbol{M_R}$ suprotan smeru kretanja satne kazaljke, i to je nacrtano na {emi optere}enja (Sl. 3.83).

Opšti izraz diferencijalne jednačine ugla uvijanja po jedinici du`ine glasi:

$$\boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dz^2} - \alpha^2\theta = -\alpha^2 \frac{M_0}{GI_t}},$$

pa po{to se optere}enje menja skokovito usled koncentrisanih momenata, op{te re{enje za ugao uvijanja po celoj du`ini {tapa mora se dobiti etapno, prema uslovima u svakoj deonici {tapa.

1. Za deonicu {tapa ozna~enu sa "**I**" (Sl. 3.83), odnosno za $0 \le z \le l_1$, diferencijalna jedna~ina glasi ...

gde optere}enje u ovoj deonici {tapa iznosi:

$$M_{01} = M_R - m \cdot z \; . \tag{B}$$

Prema tome, partikularno re{enje za deonicu "I" iznosi:

$$\theta_{Ip} = \frac{M_R}{GI_t} - \frac{m \cdot z}{GI_t} \; , \tag{D}$$

tako da op{te re{enje ugla uvijanja za deonicu "I" glasi:

$$\theta_I = C_1 ch\alpha z + C_2 sh\alpha z + \frac{M_R}{GI_t} - \frac{m \cdot z}{GI_t} \; .$$

2.Za deonicu elementa "II", odnosno za $l_1 \le z \le l_2$, mo`e se postaviti diferencijalna jedna~ina koja glasi ..

U deonici "II", optere}enje, tj. teku}i moment uvijanja iznosi:

$$M_{0II} = M_R - M_1 - m \cdot z \; . \tag{F}$$

Partikularno re{enje se isto usvaja u obliku polinoma prvog stepena, tako da se analogno prethodnom postupku dobija:

(L) $$\theta_{IIp} = \frac{M_R}{GI_t} - \frac{M_1}{GI_t} - \frac{m \cdot z}{GI_t} \; . \tag{G}$$

odnosno,

$$\theta_{II} = C_1 ch\alpha z + C_2 sh\alpha z + \frac{M_R}{GI_t} - \frac{mz}{GI_t}\Bigg|^{I} - \frac{M_1}{GI_t}\left[1 - ch\alpha\left(z - l_1\right)\right]\Bigg|^{II} \; . \tag{3.212}$$

3. Za deo “III” elementa, diferencijalna jedna~ina glasi:

$$\frac{d^2\theta_{III}}{dz^2}-\alpha^2\theta_{III}=-\alpha^2\frac{M_{0\,III}}{GI_t}\,, \tag{M}$$

gde je

$$M_{0\,III}=M_R-M_1-M_2-m\cdot z\,.$$

$$\theta_{III}=C_1\,ch\alpha z+C_2\,sh\alpha z+\frac{M_R}{G\,I_t}-\frac{m\,z}{G\,I_t}\Bigg|^{I}-\frac{M_1}{G\,I_t}\left[1-ch\alpha\left(z-l_1\right)\right]\Bigg|^{II}-$$

$$-\frac{M_2}{GI_t}\left[1-ch\alpha\left(z-l_2\right)\right]\Bigg|^{III}\,. \tag{3.213}$$

Konstante C_1 i C_2 odre|uju se iz uslova na krajevima {tapa, koji prema konfiguraciji zadatka (ukle{tenje i slobodan kraj {tapa) glase:

Za $z=0 \;\rightarrow\; \theta_I=0 \qquad \left(w=-\omega\theta_I=0\right)$.

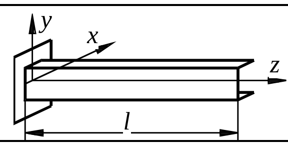
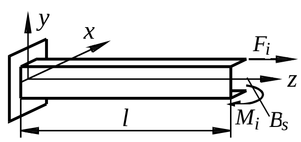
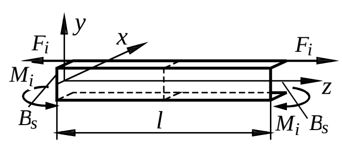
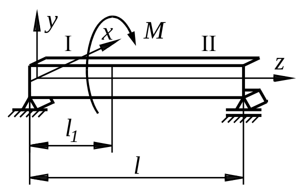
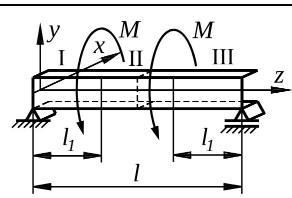
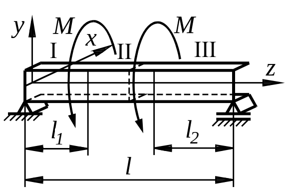
Za $z=l \;\rightarrow\; \dfrac{d\theta_{III}}{dz}=0 \qquad \left(B_s=-EI\,\dfrac{d\theta_{III}}{dz}=0\right)$.

Na osnovu oblika op{teg re{enja mo`e se zaklju~iti da se u slu~aju jo{ ve}eg broja koncentrisanih momenata uvek dodaje isti oblik partikularnog re{enja:

$$\pm\frac{M_i}{GI_t}\left[1-ch\alpha\left(z-l_i\right)\right]\;\left(i=1,2,\ldots\right) \tag{3.214}$$

U opštem slučaju, smer momenta uvijanja je proizvoljan, tako da znak ispred partikularnog re{enja mo`e da bude "+" ili "–", zavisno od smerova i intenziteta ostalih momenata.

Tabela 3.4

Broj	TIP NOSAČA	GRANIČNI USLOVI
1		$z=0 \quad \theta=0$ $z=l \quad \dfrac{d\theta}{dz}=0$
2		$z=0 \quad \theta=0$ $z=l \quad \dfrac{d\theta}{dz}=-\dfrac{B_s}{E I_\omega}$ $B_s=\sum F_i\,\omega_i+\sum M_i\,e_i$
3		zbog simetrije optere}enja $z=\dfrac{l}{2} \quad \theta=0$ $z=l \quad \dfrac{d\theta}{dz}=-\dfrac{B_s}{E I_\omega}$
4		$z=0 \quad \dfrac{d\theta_I}{dz}=0$ $z=l \quad \dfrac{d\theta_{II}}{dz}=0$
5		$z=0 \quad \dfrac{d\theta_I}{dz}=0$ zbog simetrije optere}enja $z=\dfrac{l}{2} \quad \theta_{II}=0$
6		$z=0 \quad \dfrac{d\theta_I}{dz}=0$ $z=l \quad \dfrac{d\theta_{III}}{dz}=0$